5. Énoncés des exercices

Exercice 15.1 X et Y sont deux v.a. indépendantes sur un même univers fini. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous et on a $E(Y) = 2,6$ et $V(Y) = 1,44$.

x_i	0	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,7

Calculer :

1. $E(X + Y)$
2. $E(2Y)$
3. $V(X + Y)$

Exercice 15.2 Une première urne contient trois boules : deux avec le nombre 10 et une avec le nombre -3.
Une deuxième urne contient sept boules : cinq avec le nombre 3 et deux avec le nombre 0.
On tire une boule dans chaque urne et on regarde la somme des nombres indiqués.
Définir deux v.a. X et Y pour que la somme $X + Y$ modélise la situation.

Exercice 15.3 Soient $X_1, X_2, ...X_{300}$ trois cent v.a. indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,23$.
Quelle loi suit la v.a. $X = X_1 + X_2 + ... + X_{300}$? En déduire $E(X)$.

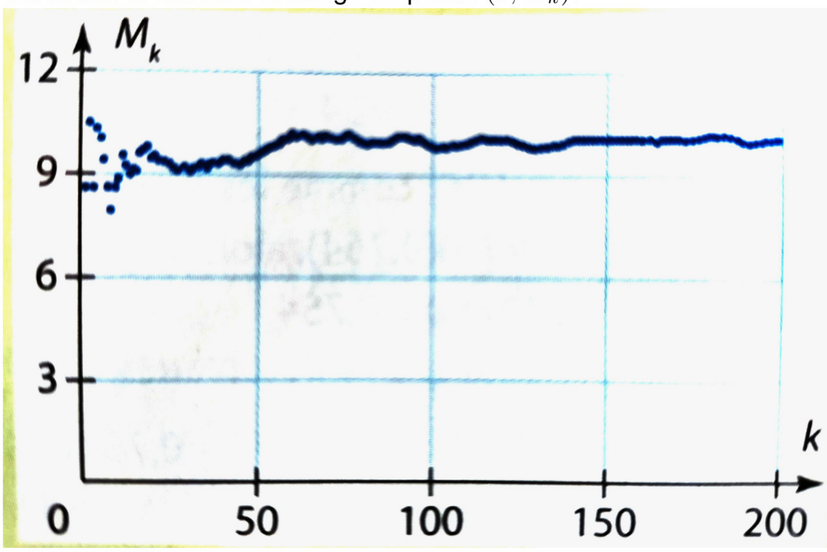
Exercice 15.4 Une roue de loterie comporte cinq secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et les deux derniers secteurs valent -400 points.
On fait tourner 4 fois de suite cette roue et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancers de roue.
Z est la v.a. donnant le gain algébrique en points à la fin du jeu.
Décomposer Z en une somme de v.a. identiques et indépendantes, puis calculer $E(Z)$.

Exercice 15.5 On considère la v.a. D donnant le débit de la Loire en $m^3.s^{-1}$ à Tours à un instant t.
On a effectué un grand nombre de mesures de ce débit et conclu que l'on a à peu près $E(D) = 350$ et $V(D) = 28000$.

1. Donner une majoration de $P(|D - 350| \geqslant 200)$, puis interpréter cette majoration dans les termes de l'énoncé.
2. Donner une minoration de la probabilité que le débit de la Loire à Tours à l'instant t soit strictement compris entre 50 et $650 m^3.s^{-1}$.

Exercice 15.6 On considère un échantillon $(X_1; X_2; ...; X_{40})$ de v.a. suivant la loi $\mathscr{B}(10; 0,9)$, et on pose $M = \frac{X_1+X_2+...X_{40}}{40}$, la v.a. moyenne de cet échantillon.
Donner une majoration de $P(|M - 9| \geqslant 3)$.

Exercice 15.7 On considère un échantillon $(X_1; X_2; ...; X_{200})$ de v.a. d'espérance μ et on pose $M_k = \frac{X_1+X_2+...X_k}{k}$ la v.a. moyenne de l'échantillon $(X_1; X_2; ...; X_k)$ pour k entier compris entre 1 et 200.
On donne ci-dessous le nuage de points $(k; M_k)$.



Estimer μ.

<u>Exercice</u> 15.8 En France en 2018, selon l'INSEE, $75,4\%$ des individus de 15 à 29 ans ont réalisé un achat sur Internet au cours des 12 derniers mois.
On interroge 500 personnes de la population française, âgées de 15 à 29 ans, pour savoir si elles ont réalisé un achat sur Internet au cours des 12 derniers mois.
Au vu de la taille de la population française, on suppose que les tirages au sort successifs ne changent pas les probabilités que la réponse soit positive ou non, et donc que ce prélèvement de 500 personnes par tirage au sort peut être assimilé à un tirage avec remise.
On considère la liste de v.a. $(X_1; X_2; ...; X_{500})$, où X_i vaut 1 si la i-ième personne a réalisé un achat sur Internet au cours des 12 derniers mois, et 0 sinon, afin de modéliser l'enquête auprès des 500 personnes.

1. Expliquer pourquoi la liste $(X_1; X_2; ...; X_{500})$ peut être considérée comme un échantillon de v.a., en précisant la loi suivie par les X_i.
2. Soit $S = X_1 + X_2 + ... + X_{500}$. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

<u>Exercice</u> 15.9 Une urne contient deux jetons sur lesquels figure le nombre 3, deux jetons sur lesquels figure le nombre 5, et un jeton sur lequel figure le nombre 10.

1. On tire un jeton dans cette urne et on considère la v.a. X donnant le nombre obtenu. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Combien de tirages avec remise doit-on effectuer dans cette urne pour être sûr (avec une marge d'erreur de 5%, i.e. "sûr à 95%") que la moyenne des nombres obtenus soit comprise entre 5 et $5,4$ exclus ?